

Opgave A NAW 5/4 nr.1 maart 2003

Jaap Spies

March 23, 2003

Het probleem

Introductie.

Bepaal alle Pythagoras driehoeken waarvan de straal van de ingeschreven cirkel een positief natuurlijk getal n is.

Oplossing.

Een bekend resultaat:

Alle Pythagoras driehoeken met zijden a , b en c en $a^2 + b^2 = c^2$ kunnen worden geparametriseerd met positieve natuurlijke getallen u en v ($u > v$), zodat $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ en $c = u^2 + v^2$.

Een ander bekend resultaat met betrekking tot de ingeschreven cirkel van een driehoek met oppervlakte A :

$$r_{in} = \frac{2A}{a + b + c}$$

Oftewel

$$r_{in} = \frac{2uv(u^2 - v^2)}{2u^2 + 2uv} = v(u - v)$$

Bij elke deler v van het positieve natuurlijke getal n vinden we een u , zo dat $n = v(u - v)$ en dus $u = \frac{n}{v} + v$. Als we stellen $q = \frac{n}{v}$, dan vinden we na enig vereenvoudigen de Pythagoras driehoek met zijden a , b en c

$$(a, b, c) = (2n + q^2, 2n + 2v^2, 2n + q^2 + 2v^2)$$